FORMALISMO LAGRANGEANO EM MECÂNICA CLÁSSICA

Marcos Duarte

Laboratório de Biofísica

Escola de Educação Física e Esporte - USP

A Mecânica é uma ciência exata, isto é, suas leis, uma vez expressas em forma de equações matemáticas descrevem e predizem os resultados de medidas quantitativas precisas. Um problema é que na maioria dos casos o fenômeno estudado é complexo, como o movimento do corpo humano, por exemplo, apresentando muitas variáveis. Então, o modelo[1] utilizado para a descrição deste fenômeno, que seria por demais complexo, é simplificado, comprometendo assim a "exatidão" da Mecânica.

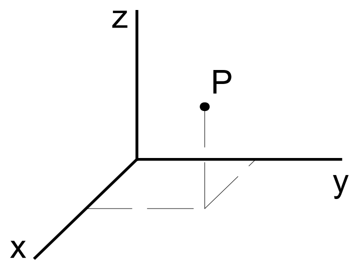
Grande número de aplicações da Mecânica Clássica baseia-se diretamente nas leis do movimento, de Newton. Entretanto, existem outras maneiras de formular os princípios da Mecânica, como as equações de Lagrange, por exemplo. Elas não são teorias novas, pois derivam das leis de Newton, mas são formas diferentes de expressar a mesma teoria, por meio de conceitos matemáticos mais avançados. Em muitos aspectos são mais elegantes do que a formulação newtoniana, e, em alguns casos, mais poderosas, porque permitem a solução de alguns problemas que, se baseada diretamente nas leis de Newton, seria muito difícil.

Este trabalho tem como objetivo revisar as abordagens da Mecânica Clássica, utilizando o formalismo lagrangeano, sobre o movimento do corpo humano. O trabalho se encontra em andamento e na fase atual descrevemos o formalismo lagrangeano, que pode ser encontrado em livros de Mecânica Clássica citados no final. A principal dificuldade neste trabalho interdisciplinar é como abordar conceitos de Mecânica Clássica de um nível avançado, como as equações de Lagrange, onde se faz necessário o conhecimento das leis de Newton e de cálculo diferencial, para um público sem estes pré-requisitos. Portanto, corremos o risco de algumas deduções deste trabalho serem consideradas mágicas ou artificiais.

[1] Por "modelo" não estamos querendo descrever uma reprodução física real em pequena escala, mas sim descrever um quadro mental simplificado de uma situação física.

Descrição do movimento

Pode-se descrever a posição de uma partícula especificando um ponto no espaço, desde que se conheçam três coordenadas :



P(x,y,z) ≡ Posição da partícula

Para descrever o movimento de uma partícula, especificam-se as coordenadas como função do tempo :

$$x(t),\ y(t),\ z(t) \quad \equiv \ x_i(t) \quad i = 1 \ldots 3$$

Para um sistema de N partículas serão necessárias 3N equações para descrever seu movimento :

$$\sum_{i=1}^{3N} x_i(t)$$

O problema básico da Mecânica Clássica é encontrar maneiras para determinar funções como estas, capazes de especificar a posição dos objetos em função do tempo, para qualquer situação mecânica. Admitindo-se como conhecido o significado de $x_i(t)$, pode-se definir as componentes da velocidade, v_i, e da aceleração, a_i, no tempo t, como :

$$v_i(t) = \dot{x}_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} \tag{1}$$

$$a_i(t) = \dot{v}_i(t) = \frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} \tag{2}$$

As leis do movimento, de Newton

Isaac Newton foi o primeiro a formular de maneira completa as três leis da mecânica (em 1687), enunciadas aqui de outra forma :

1. Todo corpo permanece em estado de repouso ou de movimento uniforme, em linha reta, a menos que seja obrigado a mudá-lo por forças aplicadas sobre ele.

2. A taxa de variação de momento linear é proporcional à força aplicada, e na direção em que a força age.

3. Para cada ação existe sempre uma reação com mesmo módulo de intensidade e direção mas de sentido contrário.

Na segunda lei, o momento linear é definido como o produto da massa pela velocidade da partícula :

$$p(t) = mv(t) \tag{3}$$

então, pela segunda lei temos :

$$F(t) = \frac{dp(t)}{dt} = \frac{d(mv(t))}{dt} = ma(t) \tag{4}$$

Outra grandeza física importante é a energia cinética da partícula, que é dada por :

$$\mathrm{T}(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}\mathrm{m}(\mathrm{v}(\mathrm{t}))^2 \tag{5}$$

Que é relacionada ao momento linear, eq. (3), por :

$$p(t) = \frac{\partial T(t)}{\partial v} \tag{5a}$$

Coordenadas Generalizadas

A aplicação direta das leis de Newton em sistemas mecânicos resulta num conjunto de equações de movimento, em termos de coordenadas cartesianas de cada uma das partículas que compõem o sistema. Em muitos casos, este não é o sistema de coordenadas mais conveniente para se resolver o problema ou descrever o movimento do sistema. Em problemas que envolvem muitas partículas, em geral é conveniente escolher um sistema que inclui a coordenada do centro de massa, por exemplo. Os sistemas de coordenadas como este último e o de coordenadas cartesianas, são englobados sob o nome de coordenadas generalizadas. **Um sistema de coordenadas generalizadas é aquele em que as posições das partículas neste sistema podem ser especificadas.** Nos problemas em que são necessárias usar coordenadas generalizadas, pode-se escrever as equações de movimento, de Newton, em termos de coordenadas cartesianas e então transformá-las em coordenadas generalizadas. No entanto, seria desejável e conveniente um método geral que estabelecesse diretamente as equações de movimento em termos de um conjunto de coordenadas generalizadas apropriadas. Além dissso, seriam desejáveis também métodos gerais para escrever, e talvez resolver, as equações do movimento em termos de qualquer sistema de coordenadas. Tal método foi inventado por Lagrange (em 1788), e é descrito a seguir.

Equações de Lagrange

Quando se descreve um sistema de partículas usando um conjunto de coordenadas generalizadas quaisquer, $q_1 ... q_{3N}$, estas estão relacionadas com as coordenadas cartesianas por:

$$q_i = q_i(x_1 ... x_{3N}) \qquad i = 1...3N \tag{6}$$

$$x_i = x_i(q_1 ... q_{3N}) \qquad i = 1...3N \tag{7}$$

As componentes cartesianas da velocidade em função das coordenadas generalizadas são :

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i(q_1, q_2 ... q_{3N})}{dt} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} \tag{8}$$ [2]

Isto é, uma componente cartesiana qualquer da velocidade da partícula em função das coordenadas generalizadas é função de todas as componentes da posição e da velocidade na coordenada generalizada :

$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(q_1 ... q_{3N}, \dot{q}_1 ... \dot{q}_{3N}) \qquad i = 1...3N \tag{8a}$$

Então, a energia cinética será :

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} \right)^2 = \tag{9}$$

---

[2] Usaremos o ponto sobre a variável para também representar a derivada temporal desta. Para não sobrecarregar a notação deixaremos de mencionar explicitamente a dependência temporal das variáveis.

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots \right)^2 = \tag{9a}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N} m_i \left[\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} \right)^2 + 2\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} \right)^2 \ldots \right] = \tag{9b}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N}\sum_{j=1}^{3N}\sum_{k=1}^{3N} m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k \tag{9c}$$

Em analogia à Mecânica newtoniana, eq. (4), pode-se pensar que as equações de movimento podem ser obtidas igualando-se a taxa de variação temporal com o tempo de cada *momento generalizado*, p_i, à *força generalizada,* F_i, correspondente :

$$F_i = \frac{\partial p_i}{\partial t} \tag{12}$$

E utilizando a eq. (4a) :

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \right) \tag{12a}$$

pois

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \tag{12b}$$

Fazendo a derivada do produto na eq. (12a) :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3N} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i} \right) \tag{13}$$

Mas

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad \text{pois} \quad \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial q_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \tag{14}$$

Então

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3N} m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \tag{15}$$

O primeiro termo da equação acima, é definido como a força generalizada, Q_i, isto é, diferente da Mecânica Newtoniana, a variação temporal do momento generalizado é igual à força generalizada **mais um outro termo**, que será discutido a seguir.

No segundo termo da Equação acima, o termo $\left(\partial x_j / \partial q_i\right)$ é uma função de q e pode ser derivado como :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) = \sum_{k=1}^{3N} \frac{d}{dq_k}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right)\frac{dq_k}{dt} = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_i}\dot{q}_k \quad [3] \qquad (16)$$

Mas se olharmos para a equação (8) vemos que o último termo da equação acima pode ser obtido por :

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial x_j}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) = \sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial^2 x_j}{\partial q_k \partial q_i}\dot{q}_k \qquad (17)$$

Comparando as eq. (16) e (17) temos :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dq_i}\left(\frac{\partial x_j}{\partial t}\right) \qquad (18)$$

Por outro lado, é possível relacionar o termo $\left(\partial \dot{x}_j / \partial q_i\right)$ com a derivada da energia cinética com relação a coordenada q_i :

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^{\,2}\right) = \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} \qquad (19)$$

Usando a eq. (18), a eq. (19) torna-se

$$\frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\right) \qquad (20)$$

Voltando, a equação (15) torna-se :

$$\frac{dp_i}{dt} = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \qquad (21)$$

---

[3] A derivada de uma função f que depende de g que por sua vez é função de t, f(g(t)), pode ser obtida por : $\frac{d}{dt}\left(f\left(g(t)\right)\right) = \frac{\partial f}{\partial g}\frac{\partial g}{\partial t}$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \tag{21a}$$

Agora vamos analisar a força Q_i. Ela pode ser decomposta em dois termos :

1. O primeiro, composto pelas forças conservativas, i.e., forças que podem ser escritas como gradientes de potenciais :

$$Q_C = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad , \quad V = V(q_1 \ldots q_{3N}) \tag{22}$$

Um exemplo de força conservativa é a força gravitacional.

2. O segundo, englobando todas as forças não conservativas, como a força de atrito e a força muscular num movimento, por exemplo, Q_{NC}.

Então

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_{NCi} \quad , \quad V = V(q_1 \ldots q_{3N}) \tag{23}$$

A eq. (21a) torna-se :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_{NCi} \tag{24}$$

Rearranjando, temos :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_i} = Q_{NCi} \tag{24a}$$ [4]

Definindo

$$L \equiv L(q_1 \ldots q_{3N}, \dot{q}_1 \ldots \dot{q}_{3N}) = T - V \tag{25}$$

Como a função de Lagrange ou Lagrangeana, temos a equação de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_{NCi} \qquad \mathrm{i = 1 \ldots 3N} \tag{26}$$

[4] Isto é possível pois $\partial V / \partial \dot{q}_i = 0$.

Vínculos

Uma classe importante de problemas de Mecânica, em que as equações de Lagrange são particularmente úteis, é composta de sistemas submetidos à ação de vínculos. **Vínculo é uma restrição na liberdade do movimento de uma partícula ou de um sistema de partículas.**Um corpo rígido, ou o movimento de um pêndulo, são exemplos de sistemas de partículas submetido · ação de vínculos. Pode-se mostrar, de forma semelhante, que a equação de Lagrange, deduzida aqui para um sistema sem vínculos, também é válida para um sistema de partículas sob a ação de vínculos. A equação de Lagrange, para um sistema de 3N partículas e com k vínculos, é então definida como :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_{NCi} \qquad i=1...3N-k \tag{27}$$

Considerações sobre o formalismo lagrangeano

Primeiro, deve ser reiterado que o formalismo lagrangeano não constitui uma nova teoria. Os resultados de uma análise lagrangeana ou newtoniana devem ser os mesmos para qualquer sistema mecânico, somente o método utilizado para se obter os resultados é diferente. Onde o formalismo newtoniano dá ênfase a um agente externo agindo sobre o corpo, a força, o método de Lagrange manipula somente com quantidades associadas com o corpo, as energias cinética e potencial. Na verdade, o conceito de força não entra no formalismo lagrangeano. Esta é uma importante propriedade do método. Desde que a energia é uma quantidade escalar, a função lagrangeana para um sistema é invariante para transformações de coordenadas. Portanto, é possível passar de um certo espaço de configurações (no qual as equações de movimento podem ser um tanto complicadas) para um espaço que pode ser escolhido para permitir a máxima simplificação do problema.

Nós estamos acostumados a pensar em sistemas mecânicos em termos de quantidades vetoriais como força, velocidade, momento angular, torque, etc., mas no formalismo lagrangeano as equações de movimento são obtidas inteiramente em termos de operações escalares no espaço de configurações.

Outro aspecto importante da analogia força versus energia é que em situações onde não é possível explicitar todas as forças agindo sobre o corpo, ainda é possível obter expressões para as energias cinética e potencial.

Descrição do movimento humano

Assumindo que os segmentos dos membros do corpo humano podem ser imaginados como pêndulos compostos com muitos graus de liberdade, e devido à geometria anatômica complexa e ao não total conhecimento da teoria de controle neuromuscular, o equacionamento e análise da atividade humana ainda é um problema espinhoso na biomecânica moderna. O desenvolvimento de modernas técnicas para quantificar o movimento humano e a computação tem capacitado análises e modelamentos mais completos. No entanto, em geral, a biomecânica ainda é uma ciência fenomenológica, restrita à descrição do movimento observado e forças envolvidas.

Num sentido mais amplo, a descrição do movimento humano na biomecânica implica na investigação do efeito das forças internas e externas no movimento. Basicamente há dois tipos de forças internas : i) Forças do músculo ou do tendão e ii) Forças de vínculo e momentos da articulação. As forças externas são a força da gravidade, de reação, de inércia e de resistência, por exemplo. A vantagem da formulação lagrangeana para a descrição do movimento é que as forças internas de vínculo não aparecem explicitamente nas equações de movimento, uma vez que o número de graus de liberdade (consequentemente o número de equações) é o número de coordenadas menos o número de vínculos do sistema. Somente as forças do músculo e do tendão para cada grau de liberdade são explicitamente mencionadas como as forças generalizadas (Q_{NCi} da eq. 27).

O primeiro e principal problema, é que no equacionamento, o modelo para a descrição do movimento humano estudado deve ser o mais completo e mais próximo do "real" possível, seja no formalismo newtoniano ou lagrangeano. Por exemplo, a descrição do andar parte de um modelo de um segmento considerando apenas o membro inferior para até um modelo de 17 segmentos considerando o corpo inteiro [1,2]. Caso contrário os resultados obtidos levarão a uma interpretação errônea da realidade. Uma vez escolhido o modelo adequado, pode-se deduzir as equações de Lagrange para o movimento.

O próximo problema é que estas equações de movimento devem ser resolvidas inversamente, uma vez que não conhecemos as expressões literais para as forças generalizadas. Este problema é definido como o "problema dinâmico inverso" em biomecânica [3]. Há dois procedimentos para resolver tal problema.

O primeiro é medir experimentalmente os dados das posições dos segmentos e diferenciá-los numericamente para obter as velocidades e acelerações correspondentes. Substituindo estes dados cinemáticos nas equações de movimento e conhecendo as medidas antropométricas, pode-se obter um sistema de equações algébricas onde somente as forças generalizadas são desconhecidas. No entanto, os erros nas medidas antropométricas e a diferenciação numérica, que magnifica os erros experimentais na medida das posições, comprometem a confiança nos resultados obtidos.

O segundo procedimento utiliza um processo iterativo para determinar as forças generalizadas que minimizarão a energia total no movimento, utilizando então critérios ótimos para minimizar a energia. O problema é que a seleção destes critérios carece de fundamentos fisiológicos e que os valores específicos para as forças de vínculo não podem ser determinados.

A determinação das forças internas dos músculos e das articulações ainda é um problema não resolvido na biomecânica, mas seguramente constituem-se na base fundamental para a melhor compreensão de critérios para o controle de movimento. A utilização do formalismo lagrangeano, ele próprio um conceito que utiliza o princípio de minimizazão de energia (para forças conservativas), na descrição do movimento humano, indica que o melhor equacionamento, enquanto dentro deste formalismo, se dará na estensão do conceito de minimização de energia para o movimento humano, uma vez que o conceito de mínima ação se aplica à natureza, e o homem está inserido dentro dela. Por último, por que a mecânica é uma ciência exata, ela é limitada na descrição do movimento humano. A complexidade de um organismo vivo, só pode ser totalmente entendida com auxílio de teorias de sistemas complexos, como a teorias de sistemas dinamicos não lineares, por exemplo.

Referências

[1]. D. I. Miller, Medicine and Science in Sports, 11(2), 115 - 122, (1979).

[2]. H. Hatze, J. Motor Behavior, 19(2), 280 - 287, (1987).

[3]. E. Y. S. Chao, Biomechanics of the Humnan Gait, in : Frontiers in Biomechanics, 225 - 244.

Textos básicos sobre o formalismo lagrangeano :

H. Goldstein, "Classical Mechanics, 2º ed. Editora Addison-Wesley, 1980.

J. B. Marion, "Classical Dynamics of particle and systems", 2º ed. Editora Academic Press, 1970.

K. R. Symon, "Mecânica", 2º ed. Editora Campus, 1986.

J. L. Synge e B. A. Griffith, "Principles of Mechanics", 2º ed. Editora McGraw-hill, 1949.