

# **Estimação da Performance em Eventos Esportivos utilizando a Mecânica Clássica e Modelos Analíticos**

**Marcos Duarte**

<http://www.usp.br/eef/lob/md>

**Laboratório de Biofísica, EEFÉ-USP**

A estimativa da máxima performance humana em eventos esportivos por meio de simples modelos físico-matemáticos tem sido alvo de elegantes estudos na literatura científica. A despeito da enorme diferença de complexidade entre fenômeno e seu modelo, as previsões tem produzido estimativas relativamente acuradas da máxima performance. A observação dos resultados em provas de corrida tem instigado o interesse dos cientistas por décadas na descrição da performance em tais provas, pois os recordes evidenciam uma relação simples entre as performances para distâncias tão diferentes quanto 100 m e 100 km.

Mais importante do que os resultados em si, tais estudos demonstram como simples modelos físico-matemáticos capturam as principais características do fenômeno; revelando nossa inevitável submissão às leis fundamentais da natureza.

No presente texto, alguns modelos para previsão da performance humana são revistos com o objetivo de demonstrar como simples leis mecânicas e relações matemáticas podem explicar boa parte do que acontece em alguns eventos esportivos.

## Andar, marcha atlética e correr

Andar é a forma mais fundamental de locomoção para os seres humanos, ainda que seja um padrão de movimento bastante complexo. Quanto aos membros inferiores, esta forma de movimento consiste em uma troca alternada e cíclica de contato dos pés com o chão. Numa primeira aproximação, cada membro inferior do ser humano durante o andar pode ser entendido como um pêndulo. Considerar os membros inferiores como pêndulos simples é uma boa aproximação para o membro inferior que está em contato com solo, que se comporta como um simples pêndulo invertido. Nesta fase o membro inferior contra-lateral está na fase de balanço e este membro inferior comporta-se como um duplo pêndulo articulado no joelho. Modelos mecânicos do andar baseados em pêndulos passivos somente sob a ação da gravidade são conhecidos como modelos balísticos do andar e se tornaram clássicos desde os primeiros trabalhos de McGhee (1968) e Mochon e McMahon (1980, 1981).

Assumindo a perna de apoio durante o andar como um pêndulo invertido como representado na Figura 1, sua frequência natural pode ser calculada e esta pode ser utilizada como uma estimativa da frequência de passada do andar se considerarmos que o gasto energético seria minimizado se andarmos com uma frequência igual a frequência natural do sistema.

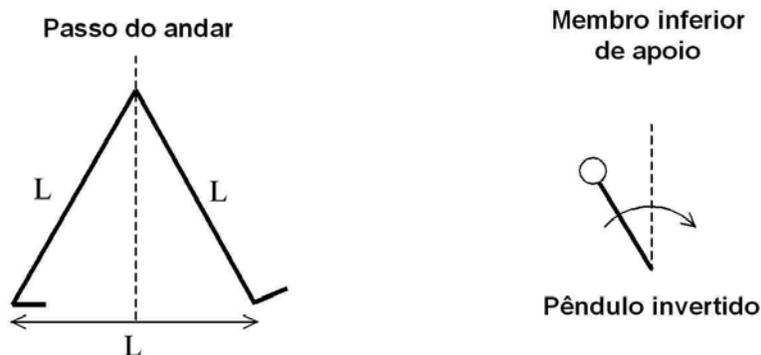


Figura 1. Modelo dos membros inferiores para o andar.

A velocidade do andar pode ser calculada como o comprimento da passada dividido pelo tempo da passada. Por sua vez, para o membro inferior como um pêndulo, o tempo da

passada deve ser metade do período de um pêndulo. De qualquer livro texto de Mecânica (por exemplo, Halliday et al., 1993), o período de um pêndulo é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}$$

Onde  $m$  e  $L$  são a massa e o comprimento do membro inferior respectivamente,  $g$  é a aceleração da gravidade com magnitude igual a  $10 \text{ m/s}^2$  e  $I$  é a inércia rotacional da perna.  $I$  é dado por  $cmL^2$ , onde  $c$  é um fator de forma. Para toda a massa concentrada a uma distância  $L$ ,  $c$  é igual a 1, para uma barra de comprimento  $L$  e massa  $m$ ,  $c$  é igual a 0,33. O fator de forma para o corpo humano aproxima-se ao de uma barra. Para um comprimento do membro inferior  $L$  da ordem de 1 m, o período do pêndulo é igual a 1,14 s, resultando num tempo da passada de metade este valor, 0,57 s. O comprimento da passada é da ordem do comprimento do membro inferior, que é de 1 m, resultando numa velocidade do andar de 1,75 m/s. 1,75 m/s ou 6,3 km/h é um valor razoável para a velocidade real do andar em seres humanos (veja por exemplo os dados da Figura 2).

A máxima velocidade que podemos andar, acima da qual necessariamente temos que mudar o padrão de movimento para o correr, pode ser entendida como a máxima velocidade que o modelo baseado num pêndulo pode executar. A transição do andar para o correr é brusca e caracterizada pelo contato dos pés com o solo: durante o andar há sempre pelo menos um dos pés em contato com o solo e há uma fase em que ambos os pés estão em contato com o chão, conhecida como fase de duplo apoio. Durante o correr, tal fase inexistente e passa a existir uma fase em que ambos os pés estão fora do chão, a fase aérea (Zatsiorsky et al., 1994). Lembrando que o membro inferior na fase de apoio oscila como um pêndulo invertido sem estar preso ao chão e que as forças que surgem da interação corpo humano-chão são da ordem de uma vez o peso corporal; para que o membro inferior consiga girar livremente sobre o apoio sem perder o contato com o chão, há uma velocidade tangencial limite deste pêndulo. Esta velocidade tangencial limite está associada à máxima força centrípeta (dada pela expressão  $mv^2/L$ ) que pode ser gerada para manter o movimento rotacional durante a fase de apoio e que é da ordem de uma vez o peso corporal:

$$mg \geq m \frac{v^2}{L} \Rightarrow v \leq \sqrt{gL}$$

Como anteriormente, se considerarmos o comprimento do membro inferior como um metro, conclui-se que a velocidade da extremidade superior do pêndulo deve ser menor ou igual a 3,3 m/s. 3,3 m/s ou 11,9 km/h seria então a máxima velocidade que uma pessoa conseguiria andar o que é uma boa estimativa desta velocidade limite real em seres humanos (veja por exemplo os dados da Figura 2). Em competições de marcha atlética chega-se a velocidades superiores, aparentemente violando este simples modelo. Há duas explicações para esta violação, a primeira é que devido aos movimentos particulares do quadril, a fase de apoio da marcha atlética não pode ser modelada como um pêndulo simples. A segunda explicação é que na verdade há muito se sabe que a marcha atlética é corrida e não andar (Zatsiorsky et al, 1994). De Angelis e Menchinelli (De Angelis, Menchinelli, 1992) observaram em todos os atletas de marcha atlética estudados fases de vôo para velocidades acima de 12 km/h, surpreendentemente um valor muito próximo ao limite previsto pelo modelo, 11,9 km/h.

De qualquer forma, uma velocidade de 12 km/h para o andar ainda que possível é altamente ineficiente do ponto de vista energético, sendo a corrida nesta velocidade, um padrão de movimento muito mais econômico, como pode ser visto na Figura 2.

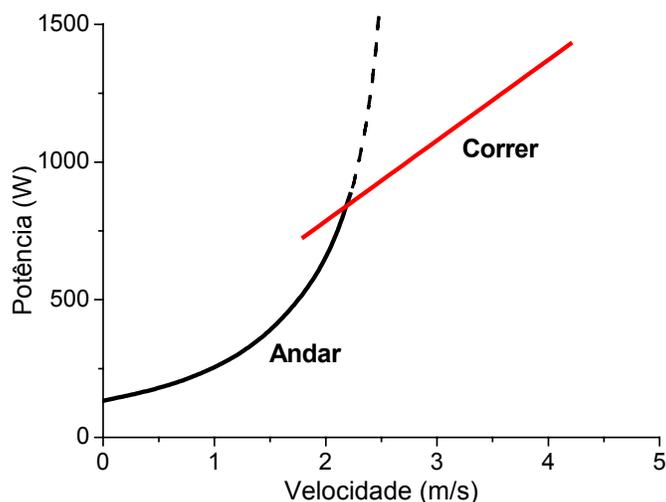


Figura 2. Potência metabólica consumida por homens durante andar e corrida versus velocidade. Potência calculada a partir de medidas do consumo de oxigênio. Dados de Margaria (1976). A linha tracejada para o andar é uma extrapolação do presente texto.

### Máxima amplitude de um salto em distância

O salto em distância por seres humanos pode ser modelado como o movimento de um projétil, como uma pedra arremessada ao ar, por exemplo.

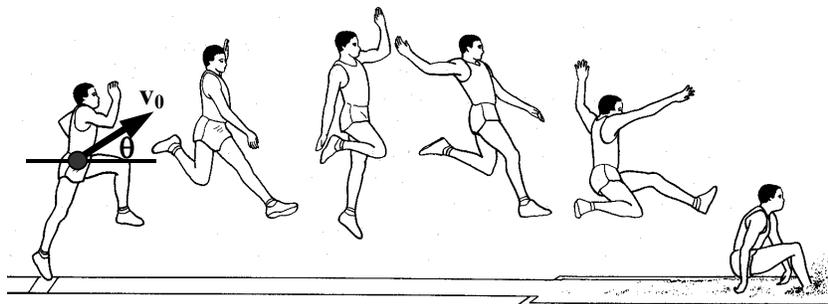


Figura 3. Representação do salto vertical e variáveis do modelo.

Considerando o corpo humano como uma partícula, a amplitude ( $A$ ) de um salto em distância é função da velocidade ( $v_0$ ) no início do salto e do ângulo de saída ( $\theta$ ):

$$A = \frac{v_0^2}{g} \text{sen } 2\theta$$

Da fórmula anterior, a amplitude do salto será máxima para um ângulo de  $45^\circ$ . Considerando-se que a máxima velocidade que o ser humano consegue alcançar é da ordem de 10 m/s, chega-se a uma máxima amplitude de salto de 10 m. Acima do recorde mundial, 8,95 m por Mike Powell. Na verdade, humanos não saltam com um ângulo de saída de  $45^\circ$ , mas com aproximadamente metade deste ângulo,  $22,5^\circ$ , por incapacidade de transformar o movimento horizontal em vertical. Para um ângulo de saída de  $22,5^\circ$ , pela equação acima a amplitude do salto é de 7,1 m. Considerar o corpo humano como uma partícula é uma simplificação aparentemente grosseira, mas analisar o salto como a trajetória de uma partícula explica cerca de 90% da distância total do salto (Hay, 1993). Contribuições da distância do centro de gravidade em relação à tábua e a diferença da altura do centro de gravidade entre a saída e aterrissagem do salto são responsáveis por cerca de 5% cada uma para a distância total do salto (Hay, 1993).

A Tabela 1 sumariza resultados e previsões para máxima velocidade do andar, o 100 m rasos, salto em distância, salto vertical, máxima velocidade no ciclismo e salto com vara. Todas as previsões foram baseadas em simples modelos físico-matemáticos utilizando-se a Mecânica Newtoniana, alguns deles descritos no presente texto, e algumas características do corpo humano.

**Tabela 1. Eventos esportivos e previsões teóricas para a máxima performance.**

Evento	Recorde	Previsão
Máxima velocidade do andar	4,8 m/s <sup>a</sup>	3,3 m/s
100 m rasos	9.79 s <sup>b</sup>	11 m/s (9,1 s) (Margaria, 1976)
Salto em distância	8.95 m <sup>c</sup>	10 m
Salto vertical	Por volta de 1 m <sup>d</sup>	0,5 m (Lin, 1978)
Máxima velocidade no ciclismo	20,27 m/s <sup>e</sup>	14 m/s (Whitt & Wilson, 1974)
Salto com vara	6,14 m <sup>f</sup>	6 m (Offenbacher, 1969)

<sup>a</sup> 1.500 m em 312 s por Algis Grigaliunas em 12/5/1990. Na verdade, há muito se sabe que a marcha atlética é corrida e não andar (Zatsiorsky et al, 1994).

<sup>b</sup> Por Maurice Greene em 16/6/99.

<sup>c</sup> Por Mike Powell em 30/8/91.

<sup>d</sup> Não há recorde oficial para salto vertical.

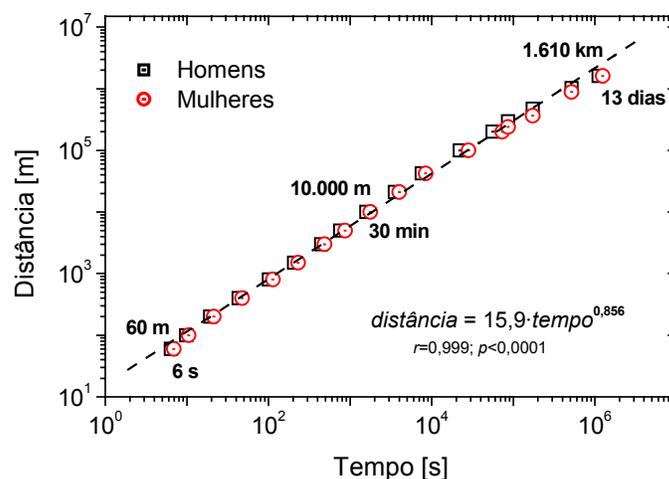
<sup>e</sup> 200 m em 9,865 s por Curtis Harnett em 28/9/1995.

<sup>f</sup> Por Sergey Bubka em 31/7/94.

## Modelos analíticos para provas de corrida

Em uma palestra em 1926, A. V. Hill declarou que “*Alguns dos mais consistentes dados fisiológicos estão contidos, não em livros sobre fisiologia, nem mesmo em livros sobre medicina, mas nos recordes mundiais para corrida de diferentes distâncias horizontais*” (Hill, 1926). A relação entre o tempo gasto em uma corrida a pé e a distância percorrida, tem sido alvo de diversos estudos por quase um século (Kennelly, 1906; Meade, 1916; Francis, 1943; Henry, 1954, 1955; Lietzke, 1954; Lloyd, 1966; Rumball, Coleman, 1970; Purdy, 1974;

Mognoni et al., 1982; Katz, Katz, 1999; Savaglio, Carbone, 2000). Estes estudos tem sido em parte instigados pela surpreendente simples relação entre distância e tempo para corridas de dezenas de metros a dezenas de quilômetros. Na Figura 4 são mostrados os records mundiais até 1999 para as provas de 60 m a mil milhas (1610 km).



**Figura 4. Gráfico logarítmico mostrando a relação entre distância percorrida e os records mundiais até 1999 para o tempo gasto em provas atléticas de pedestrianismo de 60 m a mil milhas (1610 km) para homens e mulheres. A linha tracejada e equação no gráfico mostram um ajuste dos pontos para os dados dos homens por uma reta.**

O ajuste linear mostrado na Figura 4 para a distância percorrida e o respectivo tempo gasto para os dados dos homens é:  $distância = 15,9 \cdot tempo^{0,856}$ . É interessante observar a simples relação empírica entre provas tão distintas quanto 100 m rasos, 10.000 metros e uma corrida de mil milhas, de poucos segundos a vários dias de corrida. Desde o pioneiro trabalho de Kennelly (Kennelly, 1906), diferentes tentativas de ajustes matemáticos tem sido aplicado a dados semelhantes. Lloyd (Lloyd, 1966) para os records de 50 jardas a 623 milhas até o ano de 1965, obteve um ajuste matemático muito semelhante ao reportado aqui para records de provas similares 34 anos antes:  $distância = 12,88 \cdot tempo^{0,9}$ . É importante ressaltar que tal modelo analítico (baseado em uma função matemática ajustada) foi feito numa escala logarítmica, onde devido a grande variação de distância e tempo, pequenos erros do ajuste não são observáveis. A Tabela 2 mostra para três distâncias, as diferenças entre o tempo real e tempo obtido pelo ajuste matemático, para as provas de 100 e 10000 m as diferenças foram

menores que 20%, o que é bastante satisfatório considerando-se a gama de distâncias e a simplicidade do ajuste. Vale ressaltar que o ajuste poderia ser melhor se não fossem considerados as provas acima de 100 km, que produzem tempos aquém do esperado segundo as projeções das provas de menores distâncias, isto é, os tempos produzidos para estas provas longas não são tempos competitivos relativos às provas mais curtas.

**Tabela 2. Diferenças entre alguns recordes mundiais até 1999 para corrida para os homens e o ajuste matemático mostrado na Figura 4 ( $\text{distância} = 15,9 \cdot \text{tempo}^{0,856}$ ).**

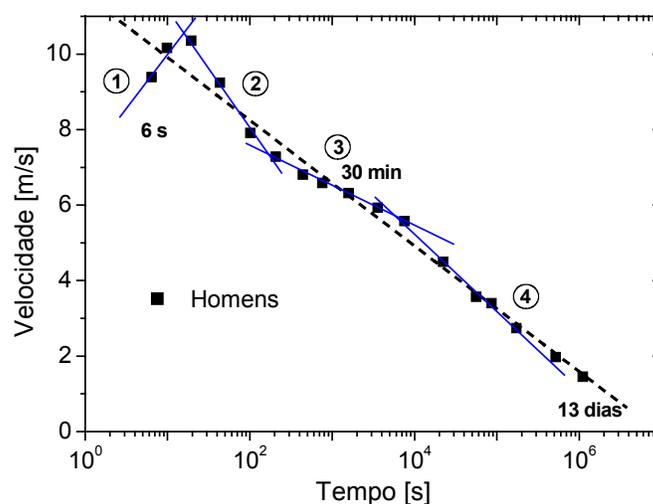
Distância	Recorde	Ajuste matemático	Diferença absoluta (recorde-ajuste)	Diferença relativa $100 \cdot (\text{recorde-ajuste}) / \text{recorde}$
100 m	9,79 s	8,57 s	1,22 s	12 %
10.000 m	1.582,75 s <sup>a</sup>	1859,5 s	-276,75 s	-17 %
1.610 km	1.107.880 s <sup>b</sup>	703.823 s	404.057 s	36 %

<sup>a</sup> Por Haile Gebrselassie em 1/6/98.

<sup>b</sup> Por Georgs Jermolajevs em 11-24/9/1995.

Hill (Hill, 1927) ao considerar os aspectos energéticos envolvidos na corrida, hipotetizou que o gasto energético total de um corredor em um dado tempo é determinado por uma reserva armazenada  $A$ , que pode ser gasta rapidamente ou poupada e uma outra fonte de energia que é gasta à uma taxa constante,  $B$ . Este modelo representa simplificadaamente duas fontes de energia: anaeróbica e aeróbica. Por conseguinte, para uma corrida de duração  $t$ , a energia total disponível,  $E$ , seria  $E=A+Bt$ . Para a potência,  $P$ , sendo a taxa de variação da energia, tem-se:  $P=A/t+B$ . Hill considerou ainda que a potência do corredor era uma função de sua velocidade,  $v$ ,  $P=f(v)$ . Eliminando-se  $P$  das duas últimas equações tem-se:  $f(v)=A/t+B$ . Isto é, para corridas com diferentes durações  $t$  e com mesmos  $A$ 's e  $B$ 's, deve-se procurar uma função da velocidade que resulte em uma relação inversamente linear com a duração das corridas. Uma indicação desta relação pode ser observada no gráfico velocidade média versus tempo da prova como o mostrado na Figura 5 para os mesmos dados utilizados na Figura 4.

Em um gráfico logarítmico, a relação inversa entre  $v$  e  $t$  resulta em uma reta de coeficiente angular negativo. Na Figura 4, pode-se observar o ajuste dos dados por uma reta (linha tracejada). Embora o ajuste por uma única reta possa ser considerado satisfatório face à simplicidade do modelo e a grande amplitude de tempos das corridas, pode-se observar quatro fases distintas no gráfico, representadas pelas retas contínuas e os respectivos números de 1 a 4. Estas quatro fases tem sido associadas a mecanismos metabólicos específicos na geração de energia pelo ser humano e vão além do escopo deste texto (veja por exemplo, Henry, 1955 e Lloyd, 1966, Ward-Smith, 1999).



**Figura 5. Gráfico logarítmico mostrando a relação entre a velocidade média e os recordes mundiais até 1999 para o tempo em provas de corrida a pé de 60 m a 10 mil milhas (1610 km). A linha contínua representa um ajuste por uma reta para os dados dos homens (significando uma relação do tipo  $v=A/t+B$  entre velocidade e tempo da prova).**

Mais importante do que os resultados aqui apresentados, tais estudos demonstram como simples modelos físico-matemáticos capturam as principais características do fenômeno; revelando nossa inevitável submissão às leis fundamentais da natureza.

## Referências

DeAngelis, M., Menchinelli, C. (1992) Times of flight, frequency and length of stride in race walking. In: Rodano, R., Ferrigno, G., Santambroglio, C.C. (eds.) ISBS'92 Proceedings.

- 10th Symposium of the International Society of Biomechanics in Sports. Milano, Itália, 1992, 85-88.
- Francis, A.W. (1943) Running records. *Science*, vol. 98, 315-316.
- Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. (1993) *Fundamentals of Physics*. John Wiley & Sons, New York, EUA.
- Hay, J.G. (1993) *The biomechanics of sport techniques*. 4<sup>a</sup> ed., Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, EUA.
- Henry, F.M. (1954) Theoretical rate equation for world-record running speeds. *Science*, vol. 120, 1073-1074.
- Henry, F.M. (1955) Prediction of world records in running sixty yards to twenty-six miles. *The Research Quarterly*, vol. 26, 147-158.
- Hill, A.V. (1926) *Muscular activity: Herter lectures*, Williams and Wilkins, Baltimore, EUA.
- Hill, A.V. (1927) *Muscular movement in man: the factors governing speed and recovery from fatigue*. McGraw-Hill, New York, EUA.
- Katz, J.S., Katz, L. (1999) Power laws and athletic performance. *Journal of Sports Sciences*, vol. 17, 467-76.
- Kennelly, A.E. (1906) An approximate law of fatigue in the speed of racing animals. *Proceedings of the American Academy*, vol. 61, 487-523.
- Lietzke, M.H. (1954) An analytical study of world and olympic racing records. *Science*, vol. 119, 333-336.
- Lin, H. (1978) Newtonian mechanics and the human body: some estimates of performance. *American Journal of Physics*, vol. 46, 15-18.
- Lloyd, B.B. (1966) The energetics of running: an analysis of world records. *Proceeding of the British Association for Advancement of Science*, 515-530.
- Margaria, R. (1976) *Biomechanics and energetics of muscular exercise*. Oxford University Press, Londres, Reino Unido.
- McGhee, R.B. (1968) Some finite state aspects of legged locomotion. *Mathematical Biosciences*, vol. 2, 57-66.
- Meade, G.P. (1916) An analytical study of athletic records. *The Scientific Monthly*, vol. 2, 596-600.
- Mochon, S., McMahon T.A. (1980) Ballistic walking. *Journal of Biomechanics*, vol. 13, 49-57.
- Mochon, S., McMahon T.A. (1981) Ballistic walking: an improved model. *Mathematical Biosciences*, vol. 52, 241-260.
- Mognoni, P., Lafortuna, C., Russo, G., Minetti, A. (1982) An analysis of world records in three types of locomotion. *European Journal of Applied Physiology and Occupational Physiology*, vol. 49, 287-99.
- Offenbacher, E.F. (1969) Physics and the vertical jump. *American Journal of Physics*, vol. 38, 829.
- Purdy, J.G. (1974) Least squares model for the running curve. *The Research Quarterly*, vol. 45, 225-238.

- Rumball, W.M., Coleman, C.E. (1970) Analysis of running and the prediction of ultimate performance. *Nature*, vol. 228, 184-185.
- Savaglio, S., Carbone, V. (2000) Scaling in athletic world records. *Nature*, vol. 404, 244.
- Ward-Smith, A.J. (1999) The bioenergetics of optimal performances in middle-distance and long-distance track running. *Journal of Biomechanics*, vol. 32, 461-465.
- Whitt, F., Wilson, D. (1974) *Bicycling science*. MIT Press, Cambridge, EUA.
- Zatsiorsky, V.M., Werner, S.L., Kaimin, M.A. (1994) Basic kinematics of walking. *The Journal of Sports Medicine and Physical Fitness*, vol. 34, 109-130.